ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

“ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

Кафедра теории управления и оптимизации

Методические указания к выполнению курсовых работ на III курсе

Составители: Алеева С.Р., Белов Е.Г., Маркелова Е.Ю., Тырсин А.Н., Ухоботов В.И.

Челябинск
2005 год

Каждая курсовая работа состоит из трех задач.

1 Кооперативная игра трёх игроков

Теоретический материал к данной теме содержится в [1]—[2].

Назовем игрой n игроков следующий кортеж:

$$\Big(X_1, X_2, \ldots, X_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)\Big),$$

здесь X_i — множество стратегий (способов поведения) i-го игрока, $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ — функция выигрыша i-го игрока $\big(x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n\big)$.

Целью i-го игрока является максимизация своей функции выигрыша выбором $x_i \in X_i$.

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, через 2^I обозначим множество всех непустых подмножеств I, тогда множество $K \in 2^I$ назовем коалицией (например $K = \{1, 3\}$ — коалиция 1 и 3 игроков).

Обозначим для каждой коалиции K антагонистическую игру [1] следующим образом:
в антагонистической игре $\big(X, Y, f\big)$ множество стратегий I игрока $X = \prod\limits_{i \in K} X_i$ (декартово произведение стратегий игроков коалиции), множество стратегий II игрока $Y = \prod\limits_{j \in I \setminus K} X_j$, $f = \sum\limits_{i \in K} f_i$ — функция выигрыша I игрока.

Цену [1, 2] игры $\big(X, Y, f\big)$ обозначим $v(K)$.

Определение 1.1. *Кооперативной игрой называется пара $\big(I, v\big)$, где I — множество игроков, v — функция, определенная на 2^I, имеет смысл гарантированного результата коалиции K.*

Определение 1.2. *Игра $\big(I, v\big)$ называется существенной, если*

$$\sum_{i \in I} v(i) < v(I) \tag{1.1}$$

Строгое неравенство (1.1) означает, что игрокам имеет смысл образовывать коалиции.

Определение 1.3. *Дележом в кооперативной игре $\big(I, v\big)$ называется вектор $\overline{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ такой, что*

1. $z_i \geqslant v(i)$, *для всех* $i \in I$
2. $\sum\limits_{i \in I} z_i = v(I)$.

Первое условие означает, что при дележе каждый игрок должен получить не меньше того, что он может получить, образовав коалицию $K = \{i\}$ с самим собой; а второе условие — поделить можно только то, что игроки получат, объединившись в коалицию $K = I$.

Доминирование дележей

Заметим, что во всякой существенной (см.(1.1)) кооперативной игре $\big(I, v\big)$ множество дележей бесконечно.

Определение 1.4. *Дележ $\overline{z}$ доминирует дележ $\overline{y}$ по коалиции K, если*

1. $z_i > y_i$, *для всех* $i \in K$
2. $\sum\limits_{i \in K} z_i \leqslant v(K)$.

Первое условие означает, что дележ $\overline{z}$ лучше дележа $\overline{y}$ для всех членов коалиции K; а второе условие означает, что такой дележ коалиция K может реализовать, так как $v(K)$ — гарантированный результат этой коалиции.

Заметим, что ни один дележ нельзя доминировать коалицией K из одного игрока и коалицией I.

Определение 1.5. *C-ядром в кооперативной игре $\big(I, v\big)$ называется множество всех недоминируемых (ни по одной коалиции) дележей.*

Рассмотрение таких дележей не приведет к образованию коалиций меньших I.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы дележ $\overline{z}$ лежал в C-ядре необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{i \in K} z_i \geqslant v(K), \ \text{при всех } K \in 2^I \tag{1.2}$$

Рассмотрим частный случай кооперативной игры трех игроков:
пусть $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{1, 2\}$, $X_3 = \{1, 2\}$; $x \in X_1$, $y \in X_2$, $z \in X_3$.
$f_1(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $f_2(y, z) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $f_3(x, z) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ — функции выигрышей игроков.

Тогда, например, для коалиции $K = \{1, 3\}$ множество чистых стратегий I игрока

$$X = X_1 \times X_3 = \big\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\big\} = \{1, 2, 3, 4\} \tag{1.3}$$

Последнее равенство — простая нумерация стратегий;

$$Y = X_2 = \{1, 2\} \tag{1.4}$$

Таким образом, функция выигрыша I игрока f образует матрицу размером $4{\times}2$.

$$f(x, y, z) = f_1(x, y) + f_3(x, z)$$

Например:
$f(1, 1, 1) = f_1(1, 1) + f_3(1, 1) = a_{11} + c_{11} = f_{11}$ (см. (1.3) и (1.4))
$f(2, 1, 2) = f_1(2, 1) + f_3(2, 2) = a_{21} + c_{22} = f_{41}$
$f(1, 1, 2) = f_1(1, 1) + f_3(1, 2) = a_{11} + c_{12} = f_{21}$

Таким образом, для задания кооперативной игры $\big(I, v\big)$ в этом случае следует (самое большее) научиться решать матричные игры ($2{\times}2$ и $4{\times}2$ [1, 2]). А после их решения C-ядро следует найти из системы линейных неравенств (1.2).

Варианты заданий

I. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

II. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

III. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

IV. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

V. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

VI. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

VII. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

VIII. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

IX. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

X. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

XI. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

XII. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

XIII. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

XIV. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

XV. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

XVI. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

XVII. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

XVIII. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

XIX. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

XX. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

XXI. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

XXII. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

XXIII. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

XXIV. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

XXV. $f_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $f_2(y,z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $f_3(x,z) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

2 n-этапная динамическая задача управления ресурсами

Теоретический материал к данной теме содержится в [3]—[6].

Введение

Метод динамического программирования (ДП) позволяет определить оптимальное решение n-мерной задачи путем ее декомпозиции на n-подзадач относительно одной переменной. Фундаментальным принципом декомпозиции является принцип оптимальности Беллмана, согласно которому оптимальная стратегия в каждой подзадаче определяется независимо от стратегий, примененных в предыдущих подзадачах. С каждой подзадачей связан этап решения, так что решение исходной задачи находится за n этапов.

Вычисления в ДП выполняются рекуррентно в том смысле, что оптимальное решение одной подзадачи используется в качестве исходных данных для следующей. Для системы подзадач определяют параметр "состояние системы".

Состояние системы на i-ом этапе — это информация, связывающая этапы между собой, при этом оптимальные решения для оставшихся этапов могут приниматься без проверки того, как были получены решения на предыдущих этапах. Такое определение состояния системы позволяет рассматривать каждый этап отдельно и гарантирует, что решение является допустимым на каждом этапе.

Различают два алгоритма вычислений в рекуррентной процедуре ДП: прямой и обратный. Прямая прогонка предполагает последовательные вычисления от первого этапа до последнего, а обратная прогонка — от последнего к первому. Алгоритмы прямой и обратной прогонки приводят к одному и тому же решению. Выбор алгоритма определяется эффективностью с вычислительной точки зрения.

Продемонстрируем применение ДП в экономической задаче управления запасами. В частности, рассмотрим *однопродуктовую n-этапную динамическую задачу определения экономичного размера заказа.*

1. *Постановка и математическая модель задачи.*

Как в бизнесе, так и в производстве, обычно принято поддерживать разумный запас материальных ресурсов. Слишком низкий уровень запаса приводит к дорогостоящим остановкам производства, потерям прибыли. Слишком высокий запас приводит к "омертвению" капитала, большим затратам на хранение запаса. Задача управления запасами определяет уровень запаса, который уравновешивает два упомянутых крайних случая.

В общем случае экономичный размер заказа определяется путем минимизации следующей функции затрат:

(Суммарные затраты) = (затраты на приобретение) + (затраты на оформление заказа)+ (затраты на хранение заказа) + (потери от дефицита запаса).

Рассмотрим n-этапную однопродуктовую динамическую модель управления запасами. Предполагается, что

- объем спроса на запас на каждом этапе является детерминированным;

- затраты на оформление заказа определены для каждого периода планирования;
- дефицит отсутствует, то есть спрос на продукцию на протяжении текущего периода не может быть удовлетворен за счет ее производства в последующие периоды;
- стоимость производства единицы продукции и стоимость хранения единицы продукции определены для каждого периода.

Введем обозначения:

i — номер текущего этапа;

z_i — количество заказанной продукции (объем заказа) на i-ом этапе;

D_i — объем спроса;

K_i — затраты на оформление заказа;

h_i — затраты на хранение единицы продукции, переходящей с i-ого этапа на этап $i+1$;

x_i — объем запаса на начало i-ого этапа, тогда x_{i+1} — объем запаса, переходящего с i-ого этапа, на $i+1$ этап;

$c_i(z_i)$ — функция предельных производственных затрат при заданном значении z_i.

Соответствующая функция производственных затрат (на закупку и оформление) для этапа i задается формулой:

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 0, & z_i = 0, \\ K_i + c_i(z_i), & z_i > 0. \end{cases}$$

Задача управления запасами сводится к нахождению значений z_i, минимизирующих суммарные затраты, связанные с размещением заказов, закупкой и хранением продукции на протяжении n этапов. Затраты на хранение на i-ом этапе для простоты предполагаются пропорциональными величине x_{i+1}:

$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i.$$

Для построения модели динамического программирования используем рекуррентные соотношения процедуры прямой прогонки. Определим состояние на i-ом этапе как объем запаса x_{i+1} на конец этапа, где

$$0 \leqslant x_{i+1} \leqslant D_{i+1} + \ldots + D_n.$$

Отсюда следует, что $x_{n+1} = 0$. Пусть $f_i(x_{i+1})$ — минимальные общие затраты на этапах 1, 2, …, i при заданной величине запаса x_{i+1} на конец этапа i. Тогда рекуррентное уравнение алгоритма прямой прогонки будет записано следующим образом:

$$f_1(x_2) = \min_{0 \leqslant z_i \leqslant D_i + x_2} \{C_1(z_1) + h_1 x_2\},$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \leqslant z_i \leqslant D_i + x_{i+1}} \{C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_i = x_{i+1} + D_i - z_i)\}, i = 2, \ldots, n.$$

Пример

Требуется найти оптимальную стратегию в трехэтапной системе управления запасами, если предельные затраты на приобретение продукции составляют 10 долларов за каждую единицу для первых трех единиц товара и 20 долларов — за каждую дополнительную единицу. Начальный запас равен 1 единице. Спрос, затраты на оформление и хранение даны в таблице:

Период(i)	Спрос(D_i)	Затраты на оформление(K_i)	Затраты на хранение(h_i)
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

Функция производственных затрат (на закупку и оформление) для этапа i: $C_i(z_i) = K_i + c_i(z_i)$ для $z_i > 0$, где

$$c_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i & ,0 \leqslant z_i \leqslant 3 \\ 30 + 20(z_i - 3) & ,z_i \geqslant 4. \end{cases}$$

<u>*Этап 1.*</u> $D_1 = 3$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 2 + 4 = 6$.

Для вычисления $f_1(x_2)$ используем таблицу:

x_2	h_1x_2	$C_1(z_1) + h_1x_2$							Оптимальное решение	
		$z_1 = 2$	3	4	5	6	7	8		
		$C_1(z_1) = 23$	33	53	73	93	113	133	$f_1(x_2)$	z_1^*
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

<u>*Этап 2.*</u> $D_2 = 2$, $0 \leqslant x_3 \leqslant 4$.

Для вычисления $f_2(x_3)$ используем таблицу:

x_3	h_2x_3	$C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_2 = x_3 + D_2 - z_2)$							Оптимальное решение	
		$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
		$C_2(z_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0+55 =55	17+34 =51	27+23 =50					50	2
1	3	3+76 =79	20+55 =75	30+34 =64	40+23 =63				63	3
2	6	6+97 =103	23+76 =99	33+55 =88	43+34 =77	63+23 =86			77	4
3	9	9+118 =127	26+97 =123	36+76 =112	47+55 =101	66+34 =100	86+23 =109		100	4
4	12	12+139 =151	29+118 =147	39+97 =136	49+76 =125	69+55 =124	89+34 =123	109+23 =132	123	5

<u>*Этап 3.*</u> $D_3 = 4$, $x_4 = 0$.

Для вычисления $f_3(x_4)$ используем таблицу:

x_4	h_3x_4	$C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_3 = x_3 + D_3 - z_3)$					Оптимальное решение	
		$z_3 = 0$	1	2	3	4		
		$C_3(z_3) = 0$	16	26	36	56	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0+123 =123	16+100 =116	26+77 =103	36+63 =99	56+50 =106	99	3

Для нахождения оптимального решения используем алгоритм обратной прогонки. Из последней таблицы $z_3^* = 3$. Чтобы определить из предпоследней таблицы z_2^*, надо найти $x_3 = x_4 + D_3 - z_3^*$, где $x_4 = 0$. Получим $x_3 = 1$. Для этого аргумента находим значение $z_2^* = 3$.

Аналогично, из первой таблицы найдем z_1^*. Для этого надо найти $x_2 = x_3 + D_2 - z_2^*$, где $x_3 = 1$. Получим $x_3 = 0$. Для этого аргумента находим значение $z_2^* = 2$.

Итак, на первом этапе следует заказывать 2 единицы, на втором — 3, на третьем — 3 единицы.

Задания для самостоятельной работы

1. Изучить принцип динамического программирования. Ознакомиться с детерминированными моделями управления запасами и использованием метода динамического программирования при решении однопродуктовой n-этапной динамической задачи определения экономичного размера заказа (модель с затратами на оформление заказа).

2. Решить задачу. Определить величины заказываемых партий товара на 4 этапах так, чтобы суммарные затраты были минимальны. Стоимость единицы товара — a_1 д.ед., стоимость хранения единицы товара на каждом из этапов равна $h(= h_1 = h_2 = h_3)$ д.ед., начальный запас — x_1 ед., спрос и стоимость оформления заказа на каждом этапе соответственно равны $(D_1; K_1)$, $(D_2; K_2)$, $(D_3; K_3)$, $(D_4; K_4)$; $c_i(z_i) = a_1z_i$.

Значения параметров для каждого варианта заданы в таблице 1.

Таблица 1

№вар.	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{h}$	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{D_1}$	$\mathbf{K_1}$	$\mathbf{D_2}$	$\mathbf{K_2}$	$\mathbf{D_3}$	$\mathbf{K_3}$	$\mathbf{D_4}$	$\mathbf{K_4}$
1	4	2	2	4	3	4	2	4	3	4	4
2	2	1	1	5	3	5	1	5	3	3	5
3	5	2	2	6	4	3	3	2	4	2	4
4	3	2	2	4	3	4	2	3	4	3	5
5	6	3	1	3	3	2	2	4	3	4	3
6	3	1	1	4	4	5	3	2	5	3	3
7	2	2	3	6	3	4	2	4	3	3	4
8	6	3	2	4	4	3	3	3	4	4	5
9	3	1	1	3	3	5	1	5	3	2	3
10	5	1	3	5	4	5	3	3	4	5	5
11	4	3	2	4	3	4	2	3	3	3	4
12	2	2	2	4	3	3	1	4	3	4	5
13	4	1	2	5	4	4	3	4	4	2	4
14	5	1	3	5	3	2	2	2	4	3	5
15	3	1	1	3	3	5	2	4	3	5	3
16	6	1	1	4	4	4	3	3	5	4	3
17	4	3	1	3	3	3	2	5	3	3	4
18	5	3	1	4	4	5	3	4	4	2	5
19	3	2	3	4	3	5	1	5	3	3	3
20	4	3	2	4	4	4	3	2	4	4	5
21	6	1	2	5	3	3	2	3	3	3	4
22	2	1	3	5	3	4	1	4	3	3	5
23	5	1	2	4	4	4	3	2	4	4	4
24	3	2	2	3	3	3	2	4	4	2	5
25	4	3	2	4	3	4	2	3	3	5	3
26	5	1	1	4	4	2	3	5	5	3	3
27	3	3	1	3	3	5	2	3	3	4	4
28	6	2	2	4	4	4	3	3	4	2	5
29	3	1	1	3	3	3	1	4	3	3	3
30	5	1	2	5	4	5	3	4	4	5	5

3 Численное решение задачи Коши

Теоретический материал к данной теме содержится в [7, Глава 14].

Отчет по курсовой работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче:

1. постановка задачи;
2. необходимый теоретический материал;
3. решение поставленной задачи;
4. анализ полученных результатов;
5. графический материал (если это необходимо);
6. тексты программ.

Варианты заданий к задачам 3.1-3.7 даны в **Приложении 1**.

Задача 3.1. *Найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1 порядка*

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)),\ t \in [t_0, T], \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

и оценить погрешность решения задачи.

Порядок решения задачи:

1. Задать исходные данные: функцию f правой части, начальное значение y_0.
2. Написав программу, найти приближенное решение задачи Коши по явному методу Эйлера с шагом $h = 0,1$.
3. Написав программу, найти приближенное решение задачи Коши по методу Рунге-Кутты 4 порядка точности с шагом $h = 0,1$.
4. Найти решение задачи Коши аналитически.
5. Построить таблицы значений приближенных и точного решений. На одном чертеже построить графики приближенных и точного решений.
6. Оценить погрешность приближенных решений двумя способами:
   a) по формуле $\varepsilon = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant N} |y(t_i) - y_i|$; здесь $y(t_i)$ и y_i — значения точного и приближенного решений в узлах сетки t_i, $i = 1, \ldots, N$;
   b) по правилу Рунге (по правилу двойного пересчета) (см. **Приложение 2**).

7. Выяснить, при каком значении шага $h = h^*$ решение, полученное по методу Эйлера, будет иметь такую же погрешность (см. п. 6а), как решение, полученное с помощью метода Рунге-Кутты с шагом $h = 0,1$.

Указание. В п.7 рекомендуется провести серию вычислений решения по методу Эйлера, дробя шаг h пополам.

Задача 3.2. *Задача Коши для ОДУ 2 порядка*

$$\begin{aligned} mx'' &+ Hx' + kx = f(t),\ t \in [0, T], \\ x(0) &= x_0, x'(0) = v_0 \end{aligned}$$

описывает движение груза массы m, подвешенного к концу пружины. Здесь $x(t)$ — смещение груза от положения равновесия, H — константа, характеризующая силу сопротивления среды, k — коэффициент упругости пружины, $f(t)$ — внешняя сила. Начальные условия: x_0 — смещение груза в начальный момент времени $t = 0$, v_0 — скорость груза в начальный момент времени. Промоделировать движение груза на временном отрезке $[0, T]$ при заданных в индивидуальном варианте трех наборах (I, II, III) значений параметров задачи. Для каждого набора по найденной таблице (или графику) решения задачи определить максимальное и минимальное значения функции $x(t)$ и моменты времени, в которые эти значения достигаются. Предложить свой вариант задания параметров, при которых характер колебаний груза существенно отличается от рассмотренного ранее.

Порядок решения задачи:

1. Заменить исходную задачу эквивалентной задачей Коши для системы ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{aligned} &x_1' = x_2, \\ &x_2' = \frac{f(t) - Hx_2 - kx_1}{m}, \\ &x_1(0) = x_0, \\ &x_2(0) = v_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

2. Для каждого варианта выбора параметров численно решить задачу (3.2) с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка точности с шагом $h = 0,1$.

3. Для каждого варианта выбора параметров построить график найденного решения. Сравнить характер движения груза и дать интерпретацию полученного движения.

4. Для каждого варианта выбора параметров определить требуемые в задаче характеристики.

Задача 3.3. *Написав программу, решить приближенно задачу Коши для ОДУ 1-го порядка вида (3.1), используя метод Рунге-Кутты 4 порядка точности и* *метод, указанный в варианте, с шагами h и $h/2$. Для каждого метода оценить погрешность по правилу Рунге и вычислить уточненное решение (см.* ***Приложение 2.****). Построить на одном чертеже графики приближенных решений (с шагом $h/2$) и графики уточненных решений.*

Задача 3.4. *Написав программу, решить приближенно задачу Коши для ОДУ 3-го порядка*

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(t),$$
$$y(A) = b_1, y'(A) = b_2, y''(A) = b_3$$

на отрезке $[A, B]$, используя метод Рунге-Кутты 4 порядка точности для систем ОДУ 1-го порядка с шагами $h = 0,1$ и $h = 0,05$. Оценить погрешность по правилу Рунге. Построить график решения, найденного с шагом $h = 0,05$.

Указание. Эквивалентная задача Коши для системы ОДУ 1-го порядка приведена в **Приложении 2.**

Задача 3.5. *Дана жесткая задача Коши вида (3.1). Найти решение задачи с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.*

Порядок решения задачи:

1. Написав программу, найти приближенное решение задачи Коши явным методом Эйлера с шагом $h = 0,15$.

2. Написав программу, найти решение задачи методом Рунге-Кутты 4 порядка точности с шагом $h = 0,15$.

3. Построить графики приближенных и точного решений задачи.

4. Уменьшая шаг, найти решение задачи с заданной точностью ε каждым из методов. Сравнить значения шагов интегрирования, при которых достигается точность ε.

5. Объяснить полученные результаты.

Задача 3.6. *Даны две задачи Коши для систем ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами на отрезке $[0, 1]$*

$$Y'(t) = AY(t), Y(0) = Y_0,$$
$$Z'(t) = BY(t), Z(0) = Z_0,$$

где A и B — заданные матрицы, Y_0, Z_0 — заданные векторы. Выяснить, какая из задач является жесткой.

Порядок решения задачи:

1. Составить программу для нахождения решения системы ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами по явному методу Эйлера. Используя составленную программу, решить обе задачи с шагом $h = 0,01$. Определить, для какой из задач явный метод неустойчив при данном шаге h.

2. Определив собственные числа матриц A и B, найти коэффициенты жесткости обеих систем. Какая из задач является жесткой?

3. Для жесткой задачи теоретически оценить шаг h^*, при котором явный метод Эйлера будет устойчив (см. **Приложение 2.**).

4. Составить программу для нахождения решения системы ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами по неявному методу Эйлера. Используя составленную программу, найти решение жесткой задачи с шагом $h = 0,01$. Построить графики компонент полученного решения.

5. Для жесткой задачи экспериментально подобрать шаг h, при котором графики компонент решения, полученного по явному методу Эйлера, визуально совпадают с графиками компонент решения, полученного по неявному методу с шагом $h = 0,01$. Сравнить найденное значение шага с шагом h^*. Объяснить различие поведения явного и неявного методов Эйлера при решении жесткой задачи.

Задача 3.7. *Составив программу, решить приближенно задачу Коши для ОДУ 1-го порядка вида (3.1) с помощью метода, указанного в индивидуальном варианте, с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$. При нахождении решения использовать алгоритм автоматического выбора шага.*

Указание. В результате работы программы должен создаваться файл, содержащий вектор значений приближенного решения, а также значение шага h, при котором достигается заданная точность ε. Программа по запросу должна выдавать на экран таблицу значений найденного решения в фиксированной 21 точке отрезка или график найденного решения.

Приложение 1.

Схема вариантов к заданию 3

№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи	№	Выполняемые задачи
1	4.1.1, 4.2.1, 4.5.1	11	4.1.11, 4.2.4, 4.6.4	21	4.1.21, 4.2.8, 4.6.2
2	4.1.2, 4.3.1, 4.6.1	12	4.1.12, 4.2.5, 4.7.4	22	4.1.22, 4.3.8, 4.7.2
3	4.1.3, 4.4.1, 4.7.1	13	4.1.13, 4.3.5, 4.5.5	23	4.1.23, 4.4.8, 4.5.3
4	4.1.4, 4.2.2, 4.6.2	14	4.1.14, 4.4.5, 4.6.5	24	4.1.24, 4.2.9, 4.6.3
5	4.1.5, 4.3.2, 4.5.2	15	4.1.15, 4.2.6, 4.6.6	25	4.1.25, 4.3.9 4.7.3
6	4.1.6, 4.4.2, 4.7.2	16	4.1.16, 4.3.6, 4.7.6	26	4.1.26, 4.4.9, 4.6.4
7	4.1.7, 4.2.3, 4.5.3	17	4.1.17, 4.4.6, 4.5.1	27	4.1.27, 4.2.10, 4.5.4
8	4.1.8, 4.4.3, 4.6.3	18	4.1.18, 4.2.7, 4.6.1	28	4.1.28, 4.4.4, 4.7.4
9	4.1.9, 4.3.3, 4.7.3	19	4.1.19, 4.3.7, 4.7.1	29	4.1.29, 4.3.10, 4.5.5
10	4.1.10, 4.3.4, 4.5.4	20	4.1.20, 4.4.7, 4.5.2	30	4.1.30, 4.4.10, 4.6.5

Варианты заданий к заданию 3

Таблица к задаче 3.1

№	$f(t,y)$	t_0	T	y_0	№	$f(t,y)$	t_0	T	y_0
4.1.1	$y/t+t^2$	1	2	0	4.1.16	$-y/t+3t$	1	2	1
4.1.2	$y\operatorname{ctg} t+2t\sin t$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	0	4.1.17	$\frac{2ty}{1+t^2}+1+t^2$	1	2	3
4.1.3	$-y\cos t+\frac{\sin 2t}{2}$	0	1	0	4.1.18	$y\frac{2t-1}{t^2}+1$	1	2	1
4.1.4	$y\operatorname{tg} t+\cos^2 t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+1$	$\frac{1}{2}$	4.1.19	$-\frac{3y}{t}+\frac{2}{t^3}$	1	2	1
4.1.5	$\frac{y}{t+2}+t^2+2t$	-1	0	$\frac{3}{2}$	4.1.20	$-2yt-2t^3$	1	2	e^{-1}
4.1.6	$\frac{y}{t+1}+e^t(t+1)$	0	1	1	4.1.21	$\frac{y}{t}-\frac{2}{t^2}$	1	1	1
4.1.7	$\frac{y}{t}+t\sin t$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}+1$	1	4.1.22	$-yt-t^3$	0	1	3
4.1.8	$-\frac{y}{t}+\sin t$	π	$\pi+1$	$\frac{1}{\pi}$	4.1.23	$\frac{2y}{t+1}+e^t(t+1)^2$	0	1	1
4.1.9	$-\frac{y}{2t}+t^2$	1	2	1	4.1.24	$-2yt+te^{-t^2}\sin t$	0	1	1
4.1.10	$-\frac{2yt}{1+t^2}+\frac{2t^2}{1+t^2}$	0	1	$\frac{2}{3}$	4.1.25	$\frac{2y}{t+1}+(t+1)^3$	0	1	$\frac{1}{2}$
4.1.11	$y\frac{2t-5}{t^2}+5$	2	3	4	4.1.26	$y\cos t-\sin 2t$	0	1	3
4.1.12	$-\frac{y}{t}+\frac{t+1}{t}e^t$	1	2	e	4.1.27	$4yt-4t^3$	0	1	$-\frac{1}{2}$
4.1.13	$\frac{y}{t}-2\frac{\ln t}{t}$	1	2	1	4.1.28	$\frac{y}{t}-\frac{\ln t}{t}$	1	2	1
4.1.14	$\frac{y}{t}-\frac{12}{t^3}$	1	2	4	4.1.29	$3yt^2+\frac{t^2(1+t^3)}{3}$	0	1	0
4.1.15	$-2\frac{y}{t}+t^3$	1	2	$-\frac{5}{6}$	4.1.30	$y\cos t+\sin 2t$	0	1	-1

Таблица к задаче 3.2

№		H	k	m	$f(t)$	x_0	v_0	T
4.2.1	I	0,5	1	1	0	10	0	20
	II	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\sqrt{t}$	0	$\cdots$	$\cdots$
	III	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\sqrt{t}$	-10	$\cdots$	$\cdots$
4.2.2	I	1	1	0,5	$t\sin t$	0	0	20
	II	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$		$\cdots$
	III	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$t\sin t$	$\cdots$	-50	$\cdots$
4.2.3	I	1	5	0,75	0	-10	0	5
	II	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0	10	$\cdots$
	III	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	-10	10	$\cdots$
4.2.4	I	1	1	1	$\cos t$	0	0	20
	II	$\cdots$	$\cdots$	3	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	III	$\cdots$	$\cdots$	6	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
4.2.5	I	0,5	5	1	0	20	0	15
	II	$\cdots$	50	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	III	$\cdots$	0,5	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
4.2.6	I	1	5	1	0	0	1	15
	II	$\cdots$	0,5	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	III	$\cdots$	50	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
4.2.7	I	1	1	5	$-t$	15	0	40
	II	0,1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	III	10	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
4.2.8	I	1	1	0,5	$\sin t$	0	0	20
	II	$\cdots$	$\cdots$	5	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	III	$\cdots$	$\cdots$	50	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
4.2.9	I	1	1	2	$-\cos 0,5t$	0	0	20
	II	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$-\cos 2t$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	III	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
4.2.10	I	0,5	1	0,5	$-\sqrt{t}$	0	-10	15
	II	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$-\sqrt{t}$	0	10	$\cdots$
	III	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\sqrt{t}$	0	10	$\cdots$

Таблица к задаче 3.3

№	$f(t,y)$	t_0	T	y_0	Метод (см. **Приложение 2**)
4.3.1	$-yt + y^2e^{-t}(t+1)$	0	1	1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка I
4.3.2	$-4yt^3 + 4y^2e^{-4t}(t^3+1)$	0	1	1	Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка
4.3.3	$-4yt^3 + 4y^2e^{4t}(-t^3+1)$	0	1	-1	Модифицированный метод Эйлера 2 порядка
4.3.4	$y + 2ty^2$	0	0,8	0,5	Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка
4.3.5	$-2ty + 2y^3t^3$	0	1	$\sqrt{2}$	Метод Рунге-Кутты 3 порядка II
4.3.6	$-yt + y^2e^{t}(t-1)$	0	1	1	Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка
4.3.7	$y + y^2t$	0	0,8	1	Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка
4.3.8	$-y + y^2t$	0	1	1	Метод разложения по формуле Тейлора 2 порядка
4.3.9	$-yt + (1/2)y^2e^{t}(t-1)$	0	1	2	Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка
4.3.10	$y\,\mathrm{tg}\,t - (2/3)y^4\sin t$	0	1	1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка II

Таблица к задаче 3.4

№	A	B	b_1	b_2	b_3	a_0	a_1	a_2	a_3	$f(t)$
4.4.1	0	1,5	1	2,5	6	1	-2	0,25	45,75	$e^{-2t}+3t+1$
4.4.2	0	1,5	1	2	4	1	-1,8	0,36	44,28	$e^{-2t}-1,5t+1$
4.4.3	0	1,5	1	2,5	6	1	-1,4	0,64	41,52	$\cos 2t+3t+1$
4.4.4	0	2	1	1,5	2	1	-1,4	1,88	45,24	$\sin 2t+2t-1$
4.4.5	0	1,5	1	3	10	1	-2,4	0,09	48,87	$\sin t-7t+2$
4.4.6	0	1	1	3,5	9	1	-1	8,8	29	$\cos t+5t+3$
4.4.7	0	1,5	1	2,8	5	1	-1,5	-1,25	53,375	$e^{-t}+\cos 2t$
4.4.8	0	1,5	1,5	4	10	1	-4,6	3,94	34,28	$e^{-1,5t}+2\sin 3t$
4.4.9	0	1,5	0	2,5	8	1	-4,1	0,64	42,85	$e^{-2t}+3\sin 2,5t$
4.4.10	0	1,5	0	3,1	9	1	-3,9	9,43	26,295	$\sin 2t+2\cos 3t$

Таблица к задаче 3.5

№	$f(t,y)$	t_0	T	y_0	точное решение
4.5.1	$-20y+2t-19,9$	0	1,5	0	$-1+0,1t+e^{-20t}$
4.5.2	$-30y\cos\pi t-\pi\sin\pi t$	0	1,5	0	$\cos\pi t-e^{-30t}$
4.5.3	$-25y+1,25t-49,95$	0	1,5	0	$-2+0,05t+2e^{-25t}$
4.5.4	$-20y+20-19e^{-t}$	0	1,5	1	$1-e^{-t}+e^{-20t}$
4.5.5	$-30y+\sin 2t+30\sin^2 t$	0	1,5	1	$\sin^2 t+e^{-30t}$
4.5.6	$-25y-\sin 2t+25\cos^2 t$	0	1,5	0	$\cos^2 t-e^{-25t}$

Таблица к задаче 3.6

№	A	Y_0	B	Z_0
4.6.1	$\begin{pmatrix}-1.999 & -0.019\\ -0.063 & -1.051\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-10.850 & 9.787\\ 32.515 & -499.55\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
4.6.2	$\begin{pmatrix}-13.237 & 15.299\\ 33.885 & 522.183\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-6.905 & 0.03\\ -0.145 & -6.095\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$
4.6.3	$\begin{pmatrix}-0.717 & -23.827\\ 114.483 & -640.393\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1.905 & -0.015\\ -0.13 & -2.295\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
4.6.4	$\begin{pmatrix}-17.359 & -0.573\\ 5.366 & -21.351\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-64.712 & -85.344\\ -128.964 & -170.918\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
4.6.5	$\begin{pmatrix}-229.934 & 301.266\\ 227.624 & -303.576\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2.018 & -0.818\\ -0.082 & -1.282\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Таблица к задаче 3.7

№	$f(t,y)$	t_0	T	y_0	Метод (см. **Приложение 2**)
4.7.1	$\frac{2}{3}y^2t + \frac{y}{3}\cos^2\frac{t}{2}$	0	5	3,4	Метод разложения по формуле Тейлора 2 порядка
4.7.2	$\frac{3}{2}e^{t/2}\sin y - \frac{t^2}{4}$	-2	4	1,4	Модифицированный метод Эйлера 2 порядка
4.7.3	$-\frac{y}{3}\sqrt{t} + \frac{2}{3}y^2\sin t$	2	10	2,2	Метод Рунге-Кутты 3 порядка I
4.7.4	$\frac{t^2}{2}\cos y - \frac{y}{2}e^{-t/6}$	0	6	1,1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка II
4.7.5	$\frac{t^3}{3}\sin 2y - y^2e^{-t/2}$	-1	6	1,1	Метод Рунге-Кутты 3 порядка III
4.7.6	$-\frac{y}{3}\sqrt{t} + \frac{2}{3}y^2\sin t$	2	10	2,2	Модифицированный метод Эйлера 2 порядка

Приложение 2.

Правило Рунге практической оценки погрешности (правило двойного пересчета):
$y(t_i) - y_i^{h/2} \approx \varepsilon_i^h$, где $\varepsilon_i^h = \dfrac{y_i^{h/2} - y_i^h}{2^p - 1}$, $i = 1, \ldots, N$, p — порядок метода, а вычисления ведутся в узлах сетки t_i.
Уточненное решение вычисляется по формуле: $y_{i, уточн.} = y_i^{h/2} + \varepsilon_i^h$, $i = 1, \ldots, N$.

Расчетные формулы методов решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка:
Метод разложения по формуле Тейлора 2 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h\Big(f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}\Big[\frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y}\Big]\Big)$$

Модифицированный метод Эйлера 2 порядка:

$$\overline{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \;\; y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \overline{y}_{i+1})\Big)$$

Метод Рунге-Кутты 3 порядка I:

$$\begin{aligned}
&k_1 = hf(t_i, y_i),\\
&k_2 = hf\big(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\big),\\
&k_3 = hf(t_i + h, y_i - k_1 + 2k_2),\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3).
\end{aligned}$$

Метод Рунге-Кутты 3 порядка II:

$$\begin{aligned}
&k_1 = hf(t_i, y_i),\\
&k_2 = hf\big(t_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3}\big),\\
&k_3 = hf\big(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k_2\big),\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3).
\end{aligned}$$

Метод Рунге-Кутты 3 порядка III:

$$\begin{aligned}
&k_1 = hf(t_i, y_i),\\
&k_2 = hf\big(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\big),\\
&k_3 = hf\big(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_2\big),\\
&y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3).
\end{aligned}$$

Экстраполяционный метод Адамса 2 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\big(3f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1})\big)$$

Экстраполяционный метод Адамса 3 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\big(23f(t_i, y_i) - 16f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(t_{i-2}, y_{i-2})\big)$$

Экстраполяционный метод Адамса 4 порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\big(55f(t_i, y_i) - 59f(t_{i-1}, y_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, y_{i-3})\big)$$

Сведение ОДУ 3 порядка к системе ОДУ 1 порядка (для задачи 3.4):

$$\begin{aligned}
&y_1' = y_2 \\
&y_2' = y_3 \\
&y_3' = \frac{f(t) - a_1 y_3 - a_2 y_2 - a_3 y_1}{a_0} \\
&y_1(A) = b_1, y_2(A) = b_2, y_3(A) = b_3.
\end{aligned}$$

Условие устойчивости явного метода Эйлера для системы ОДУ 1 порядка с постоянными коэффициентами $Y'(t) = \mathbf{M}Y(t)$, $Y(t_0) = Y_0$:

$$h \leqslant \frac{2}{\max\limits_i |Re(\lambda_i)|},$$

где λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ — собственные числа матрицы $\mathbf{M}$ порядка n.

Список литературы

[1] *Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр.* М.: Наука, 1981.

[2] *Воробьев Н. Н. Теория игр: Лекции для экономистов-кибернетиков.* Л.: ЛГУ, 1974.

[3] *Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах.* М.: Высшая школа, 1986, С. 292—296.

[4] *Беллман Р. Динамическое программирование.* М.: ИЛ. 1969, С. 3—25.

[5] *Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы.* М.: Наука, 1990, 485 с.

[6] *Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций.* М.: Издательский дом "Вильямс", 2001, С. 412—462.

[7] *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров.* М.: Высшая школа, 1994.